

Matematică

clasa a IX-a

partea a II-a

filierea teoretică: profil real (matematică-informatică, științe ale naturii)

filierea tehnologică: toate profilurile (tehnic, servicii, resurse naturale)

filierea vocațională: profil militar (matematică-informatică)



ALGEBRĂ

Capitolul 1. Funcții. Lecturi grafice

1.1. Funcții. Proprietăți generale. Lecturi grafice	9
1.2. Imaginea unei funcții. Preimagine. Funcții mărginite	13
1.3. Funcția de gradul întâi	17
1.4. Funcții pare. Funcții impare. Axe de simetrie. Centre de simetrie	20
1.5. Funcții monotone	23
1.6. Funcții periodice	26
1.7. Operații cu funcții. Compunerea funcțiilor	29
<i>Teste de evaluare</i>	33
1.8. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	36

ALGEBRĂ

Capitolul 2. Funcția de gradul al doilea

2.1. Ecuația de gradul al doilea. Relațiile lui Viète	43
2.2. Definiția funcției de gradul al doilea. Reprezentarea grafică	47
2.3. Monotonia funcției de gradul al doilea	51
2.4. Semnul funcției de gradul al doilea	53
2.5. Sisteme cu ecuații de gradul al doilea	56
<i>Teste de evaluare</i>	61
2.6. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	64

GEOMETRIE

Capitolul 3. Elemente de trigonometrie

3.1. Cercul trigonometric. Funcțiile sin și cos definite pe $[0, 2\pi]$	69
3.2. Funcțiile trigonometrice sin, cos, tg, ctg	73
3.3. Relații între funcțiile trigonometrice sin, cos, tg, ctg	78
3.4. Formule trigonometrice pentru sume și diferențe	82
3.5. Transformarea sumelor în produse și a produselor în sume	86
<i>Teste de evaluare</i>	90
3.6. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	91

GEOMETRIE

Capitolul 4. Aplicații ale trigonometriei și ale produsului scalar în geometria plană

4.1. Produsul scalar a doi vectori	95
4.2. Aplicații ale produsului scalar în geometrie. Probleme de perpendicularitate. Teorema cosinusului	98
4.3. Aplicații ale trigonometriei în geometrie. Teorema sinusurilor. Rezolvarea triunghiurilor oarecare	101

4.4. Formule pentru aria triunghiului.

Raza cercului înscris în triunghi și raza cercului

circumscriș triunghiului 105

Teste de evaluare 107

Capitolul 5. Variante de subiecte pentru evaluarea sumativă 109

SOLUȚII 115

Indice de autori 155

Bibliografie 156

FUNCȚII. LECTURI GRAFICE

- Tema 1.1.** Funcții. Proprietăți generale. Lecturi grafice
- Tema 1.2.** Imaginea unei funcții. Preimagine. Funcții mărginite
- Tema 1.3.** Funcția de gradul întâi
- Tema 1.4.** Funcții pare. Funcții impare. Axe de simetrie. Centre de simetrie
- Tema 1.5.** Funcții monotone
- Tema 1.6.** Funcții periodice
- Tema 1.7.** Operații cu funcții. Compunerea funcțiilor
Teste de evaluare
- Tema 1.8.** Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

Funcții. Proprietăți generale. Lecturi grafice

Se numește *funcție* un triplet de forma (A, B, f) , unde A și B sunt două mulțimi, iar f un procedeu prin care oricărui element $x \in A$ i se asociază un singur element $y \in B$, notat $y = f(x)$; se spune că f este o funcție definită pe A cu valori în B și se notează $f : A \rightarrow B$.

Mulțimea A se numește *domeniul de definiție* al funcției, iar mulțimea B se numește *domeniul valorilor* funcției sau *codomeniul* funcției.

Dacă $x \in A$, atunci elementul $y = f(x) \in B$ se numește *imaginea lui x prin f* sau *valoarea lui f în x* .

Vom spune că două funcții $f : A \rightarrow B$ și $g : C \rightarrow D$ sunt *egale* (notăm $f = g$) dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in A$.

Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție și $D \subset A$ o submulțime a lui A . Funcția $g : D \rightarrow B$ definită prin $g(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in D$, se numește *restricția funcției f la mulțimea D* și se notează $g = f|_D$.

Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție. Mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ se numește *graficul* lui f .

Observații. 1. $G_f \subset A \times B$.

2. $(a, b) \in G_f \Leftrightarrow f(a) = b$.

Fie $f : A \rightarrow B$ o *funcție numerică* (adică $A, B \subset \mathbb{R}$) și xOy un reper cartezian în plan. Mulțimea punctelor $M(x, y)$ din plan cu $x \in A$ și $y = f(x)$ se numește *reprezentarea geometrică a graficului funcției f* (sau, pe scurt, *reprezentarea grafică a funcției f*). Dacă A este un interval sau o reuniune de intervale, reprezentarea geometrică a graficului lui f este o curbă numită *curba reprezentativă a funcției f* .

Curba reprezentativă a unei funcții numerice $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ intersectează axa Ox în punctele $P(\alpha, 0)$, unde α este soluție a ecuației $f(x) = 0$, $x \in A$ (dacă ecuația are soluții). Dacă $0 \in A$, curba reprezentativă a funcției f intersectează axa Oy în punctul $Q(0, f(0))$.

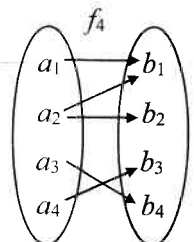
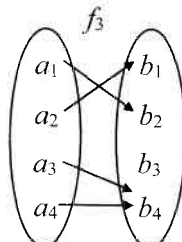
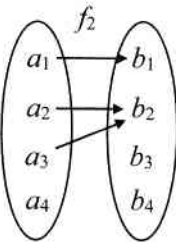
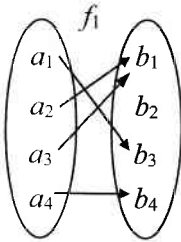


1. Determinați mulțimile $D \subset \mathbb{R}$ astfel încât corespondența $x \rightarrow 3x - 2$ să definească o funcție definită pe D cu valori în $\{1, 7, 13\}$.
2. Determinați mulțimile $D \subset \mathbb{R}$ astfel încât corespondența $x \rightarrow x^2 + 1$ să definească o funcție definită pe D cu valori în $\{1, 2, 3\}$.
3. Determinați mulțimile $E \subset \mathbb{R}$ astfel încât corespondența $x \rightarrow 2x - 1$ să definească o funcție $f : \{-1, 0, 1\} \rightarrow E$.
4. Fie mulțimea $2\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Determinați submulțimile A ale lui $2\mathbb{Z}$ astfel încât corespondența $x \rightarrow \frac{x}{3}$ să definească o funcție $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$.

5. Se consideră mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{-1, 0, 1\}$. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât corespondența $x \rightarrow ax + b$ să definească o funcție $f: A \rightarrow B$.

6. Corespondența $\frac{m}{n} \rightarrow m + n$ definește o funcție de la $\mathbb{Q}_+$ la $\mathbb{N}$?

7. Precizați care dintre următoarele diagrame definesc o funcție $f: A \rightarrow B$:



8. Determinați numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ cu proprietatea $f(1) + f(2) = 3$.

9. Găsiți toate funcțiile $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ cu proprietatea $f(x) \geq x$ pentru orice $x \in \{1, 2, 3\}$.

10. Determinați domeniul maxim de definiție pentru fiecare dintre funcțiile:

a) $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+1}{x-1}, D \subset \mathbb{R};$ b) $f: D \rightarrow \mathbb{Q}, f(k) = \frac{2k-1}{1+(-1)^k}, D \subset \mathbb{Z};$

c) $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\{x\}}, D \subset \mathbb{R};$ d) $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{[x] - \sqrt{x}}, D \subset \mathbb{R}.$

11. Pentru fiecare număr natural m , notăm cu $u(m)$ ultima sa cifră. Considerăm funcția

$$f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = u(2^n).$$

a) Calculați $f(13)$, $f(39)$ și $f(2000)$.

b) Explicitați legea de corespondență a funcției f .

12. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x-2, & x < 1 \\ x^2 - 4x + 3, & x \geq 1 \end{cases}$. Calculați:

a) $f\left(-\frac{1}{3}\right);$ b) $f(1);$ c) $f(2-\sqrt{3});$ d) $f(2+\sqrt{3}).$

13. O funcție $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea $f(x, y) = x + f(x-1, x-y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Calculați $f(5, 2)$ știind că $f(1, 0) = 3$.

14. a) Câte restricții are o funcție $f: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$?

b) Câte dintre acestea conțin pe 1 în domeniul de definiție?

15. Determinați restricțiile funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, la mulțimile:

a) $\mathbb{Z};$ b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q};$ c) $A = \{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$

16. Arătați că funcțiile $f: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left[\frac{2x+1}{3}\right]$, și $g: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^3$, sunt egale.

17. Fie funcțiile $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(k) = k + (-1)^k$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = [x] + \cos \pi x$. Arătați că $g|_{\mathbb{Z}} = f$.

18. Determinați graficul fiecărei funcții

a) $f: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$;

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

19. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + 1, & x \leq 2 \\ x + b, & x > 2 \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Determinați a, b știind că $(1, 2) \in G_f$ și $(3, 5) \in G_f$.

20. Fie mulțimile $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{a, b, c\}$. Precizați care dintre următoarele submulțimi ale produsului cartezian $A \times B$ reprezintă graficul unei funcții $f: A \rightarrow B$:

a) $G_1 = \{(0, a), (1, b), (2, c), (3, c)\}$;

b) $G_2 = \{(0, a), (1, b), (2, c)\}$;

c) $G_3 = \{(0, a), (1, b), (2, c), (3, a), (3, b)\}$;

d) $G_4 = \{(0, a), (1, a), (2, b), (3, b)\}$.

21. Determinați intersecțiile graficelor următoarelor funcții numerice cu axele de coordonate:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 5$;

b) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{1}{x}$;

c) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 2 \\ 2x - 5, & x > 2 \end{cases}$;

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 1 \\ x - 2, & x > 1 \end{cases}$;

f) $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$.



22. Arătați că funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} [x], & \{x\} < \frac{1}{2} \\ [x] + 1, & \{x\} \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ (funcția „cel mai apropiat întreg de x ”), și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \left\lceil x + \frac{1}{2} \right\rceil$, sunt egale.

23. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, și funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - a| + |x - b|$. Determinați mulțimile $D \subset \mathbb{R}$ astfel încât $f|_D$ să fie funcție constantă.

24. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 3 \\ 2x + 3, & x > 3 \end{cases}$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 2 \\ 2x + 3, & x > 2 \end{cases}$.

Determinați cea mai mare mulțime $D \subset \mathbb{R}$ astfel încât $f|_D = g|_D$.

25. Arătați că mulțimea $G = \{(x + 1, 2x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ este graficul unei funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

26. Determinați punctele de pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 1 \\ x-3, & x \geq 1 \end{cases}$, care au suma dintre abscisă și ordonată egală cu 1.
27. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 2 \\ 2x-1, & x > 2 \end{cases}$. Determinați numerele reale a, b astfel încât $a-b=1$ și $f(a)+f(b)=1$.
28. Se consideră mulțimea $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 - y = 9\}$ și funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x-1$. Determinați $A \cap G_f$.
29. Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $2f(x) + 3f(1-x) = 2x+3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
30. Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x+1) \leq x \leq f(x)+1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.



31. O funcție $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea: pentru orice $a, b \in \mathbb{N}^*$ cu $a+b=2^n$, $n \in \mathbb{N}$, rezultă că $f(a)+f(b)=n^2$. Calculați $f(2012)$.
32. O funcție $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea $f(m)+f(n)=f(mn)$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$. Dacă, în plus, $f(2)=3$ și $f(3)=5$, calculați $f(2592)$.
33. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = mx + n$, unde $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$. Arătați că $f = g$ dacă și numai dacă $a=0$, $b=m$ și $c=n$.
34. Arătați că nu există $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, și $g(x) = |x|$ să fie egale.
35. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax + b$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + cx + d$, unde a, b, c, d sunt numere raționale. Arătați că, dacă există $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $f(x_0) = g(x_0)$, atunci $f = g$.
36. Arătați că două funcții $f, g: A \rightarrow B$ sunt egale dacă și numai dacă $G_f = G_g$.
37. Arătați că pentru o funcție $f: A \rightarrow B$ avem $G_f = A \times B$ dacă și numai dacă mulțimea A are un singur element.
38. Fie A o mulțime cu a elemente și B o mulțime cu b elemente. Arătați că numărul funcțiilor $f: A \rightarrow B$ este egal cu b^a .
39. Fie A o mulțime cu n elemente și B o mulțime cu două elemente. Câte perechi de funcții (f, g) au proprietatea $G_f \cup G_g = A \times B$?

Imaginea unei funcții. Preimagine. Funcții mărginite

Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție și $X \subset A$. Mulțimea

$$f(X) := \{y \in B \mid \exists x \in X, f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in X\}$$

se numește *imagea mulțimii X prin funcția f* . Mulțimea $f(A)$ se numește *imagea funcției f* sau *mulțimea valorilor funcției f* și se notează cu $\text{Im } f$.

Observație. Dacă $f : A \rightarrow B$ este o funcție numerică, atunci imagea mulțimii $X \subset A$ prin f se obține proiectând graficul funcției $f|_X$ pe axa Oy .

Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție și $Y \subset B$. Mulțimea

$$f^{-1}(Y) := \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$$

se numește *preimagea mulțimii Y prin funcția f* .

Vom spune că o funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este *mărginită* dacă mulțimea $f(A)$ este mărginită, adică există două numere reale $\alpha < \beta$ astfel încât $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ pentru orice $x \in A$.

Observație. O funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este mărginită dacă și numai dacă există un număr real $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq M$ pentru orice $x \in A$.



1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, astfel încât $f([a, b]) = [-1, 1]$.
2. Găsiți o prelungire la $\mathbb{R}$ a funcției $f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.
3. Găsiți o prelungire la $\mathbb{R}$ a funcției $f : \mathbb{Q} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.
4. Găsiți o restricție a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 2 \\ 3x-7, & x \geq 2 \end{cases}$, care să aibă imagea $\{0, 1\}$.
5. Dați un exemplu de funcție $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ astfel încât $\text{Im } f = \{0, 1\}$.
6. Fie funcția $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(k) = 1 + (-1)^k$. Determinați $\text{Im } f$ și $f^{-1}(\{0\})$.
7. Lecturând graficele următoarelor funcții, determinați imaginile și preimaginile mulțimilor indicate:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{sgn} x; f([-1, 0])$ și $f^{-1}(\{-1, 0, 1\})$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 1] \\ (x-1)^2, & x \in (1, \infty) \end{cases}; f((1, \infty))$ și $f^{-1}([1, 4])$.

8. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$. Determinați mulțimile:

a) $f((0, 1))$; b) $f((-\infty, 2])$; c) $f^{-1}([0, \infty))$; d) $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

9. Fie funcția $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 2$. Determinați mulțimile:

a) $f([-1, 0))$; b) $f\left(\left(-\frac{1}{2}, 1\right]\right)$; c) $f^{-1}([-1, 1])$; d) $f^{-1}((0, \infty))$.

10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$. Determinați mulțimile:

a) $f([-1, 1])$; b) $f((-\infty, -1))$; c) $f^{-1}([0, 1])$; d) $f^{-1}((1, \infty))$.

11. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = [x]$. Determinați mulțimile:

a) $f([-1, 3))$; b) $f((1, \infty))$; c) $f^{-1}(\mathbb{N})$; d) $f^{-1}((-1, 1])$.

12. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{x\}$. Determinați mulțimile:

a) $f(\mathbb{Z})$; b) $f\left(\left(1, \frac{3}{2}\right)\right)$; c) $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$; d) $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}\right)$.



13. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$. Determinați mulțimile:

a) $f([-1, 1))$; b) $f((1, \infty))$; c) $f^{-1}((1, 2))$; d) $f^{-1}(\{2\})$.

14. Fie funcția $f: (2, 5] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$. Determinați mulțimile:

a) $f((2, 5])$; b) $f((2, 3))$; c) $f^{-1}([0, \infty))$; d) $f^{-1}([3, 7])$.

15. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 2 \\ 2x-3, & x \geq 2 \end{cases}$.

a) $f((-3, 3))$; b) $f((0, \infty))$; c) $f^{-1}([-1, 3))$; d) $f^{-1}((0, 5])$.

16. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -1, & x < 1 \\ 2x-1, & x \geq 1 \end{cases}$.

a) $f([-2, 2])$; b) $f((-\infty, 1])$; c) $f^{-1}([-1, 5))$; d) $f^{-1}(\{-1, 0, 1\})$.

17. Determinați imaginea funcțiilor:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 2$;

b) $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x-5}{x-3}$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 1 \\ 2x+3, & x \geq 1 \end{cases}$;

d) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x - \left\lfloor \frac{3x-1}{5} \right\rfloor$.

18. Arătați că următoarele funcții sunt mărginite:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (-1)^{[x]}$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$;

d) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \frac{n + (-1)^n}{2n + 1}$;

19. Arătați că următoarele funcții sunt mărginite:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{x\} \cdot \operatorname{sgn} x$;

b) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x + 1}$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x + 2}{|x| + 1}$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x}{1 + \{x\}}$.

20. Arătați că următoarele funcții sunt nemărginite:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$;

b) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \sin x$.

21. Fie funcția $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x, y) = 2x - 3y + 1$. Determinați $f(\mathbb{Z} \times \{0\})$ și $f^{-1}(\{1\})$.

22. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x + a}{x - 3}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinați numerele reale a astfel încât $f((3, 5]) = [7, \infty)$.

23. Studiați mărginirea funcțiilor:

a) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{1}{x}$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$.

24. Arătați că o funcție $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este mărginită dacă și numai dacă există un număr real $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq M$ pentru orice $x \in D$.

25. Fie $f, g: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții mărginite. Arătați că funcțiile

$$s: D \rightarrow \mathbb{R}, s(x) = f(x) + g(x) \text{ și } p: D \rightarrow \mathbb{R}, p(x) = f(x) \cdot g(x)$$

sunt mărginite.

26. Determinați numerele reale a astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{ax^2 + a|x| + 1}{|x| + 1}$ să fie mărginită.

27. Arătați că, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 1}$, este mărginită.

28. Determinați imaginea funcției $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(k, h) = 3k + 5h$.

29. Determinați imaginea funcțiilor:

a) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x, y) = (x^2 + 1, 2y + 1)$;

b) $g: (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = \frac{x + y}{1 + xy}$.

30. Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție. Arătați că următoarele afirmații sunt adevărate:

- a) $f(\emptyset) = \emptyset$;
- b) dacă $X, X' \subset A$, $X \subset X'$, atunci $f(X) \subset f(X')$;
- c) $f(X \cup X') = f(X) \cup f(X')$ pentru orice $X, X' \subset A$;
- d) $f(X \cap X') \subset f(X) \cap f(X')$ pentru orice $X, X' \subset A$.

31. Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție și $f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$. Arătați că au loc afirmațiile:

- a) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;
- b) dacă $Y, Y' \subset B$, $Y \subset Y'$, atunci $f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(Y')$;
- c) $f^{-1}(Y \cup Y') = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y')$ pentru orice $Y, Y' \subset B$;
- d) $f^{-1}(Y \cap Y') = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$ pentru orice $Y, Y' \subset B$.

32. Fie funcțiile $f: A \rightarrow C$ și $g: B \rightarrow D$. Considerăm funcția

$$h: A \times B \rightarrow C \times D, \quad h(x, y) = (f(x), g(y)).$$

Demonstrați egalitățile:

$$a) \quad h(A \times B) = f(A) \times g(B); \qquad b) \quad h^{-1}(C \times D) = f^{-1}(C) \times g^{-1}(D).$$

33. Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 3}$, este mărginită.

34. Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$, este nemărginită.